京大物理攻略の鍵 ⓪ 初見問題の状況把握

次の文章を読んで，$\boxed{}$には適した式を，$\boxed{}$には適切な語句をそれぞれの解答欄に記入せよ。問１～問３については，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

１に近い量は，微小量ε，ε_1，ε_2，…，ε_kに対して成り立つ近似式

$$\frac{1}{1-\varepsilon}=1+\varepsilon \text{ および } (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\cdots(1+\varepsilon_k)=1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\varepsilon_k$$

を用いて，１＋(微小量)の形に表せ。以下では「重力」という言葉は「万有引力」と同じ意味である。また，地球の自転は無視する。

地球の密度は球対称であるとする。検出器Ｂは箱に固定されている。

(1)　図１のように，宇宙空間で図の上方に向かって，一定の加速度aで引っ張られている箱を考える。箱に固定された点Ａにある振動数f_Aの光源から，上方に距離hだけ離れた点Ｂにある検出器に向けて光の信号を送る。ここでは，上下方向の運動のみを考え，ベクトルである量は上を正の向きとする。

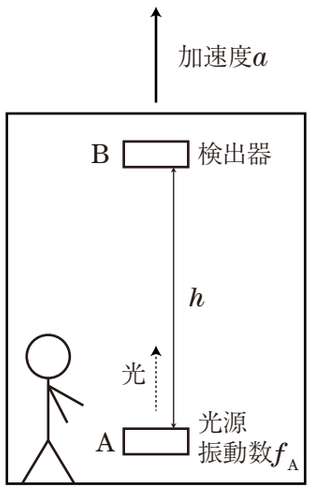

図1

光が光源を出たときの箱の速度をv_A，検出器に到達したときの箱の速度をv_Bとすると，検出器が受け取る光の振動数f_Bとf_Aの比は，ドップラー効果の公式より，

$$\frac{f_B}{f_A}=1+\frac{\boxed{\text{あ}}}{c}$$

となる。（v_A，v_Bを用いて表せ。）ここで，v_A，v_Bの大きさは光速（光の速さ）cに比べて十分小さいとし，$\frac{v_A}{c}$，$\frac{v_B}{c}$を微小量として上記の近似式を用いた。（ここでは，物体の速さは光速に比べて非常に小さいため，時間の遅れや物差しの縮みといった，いわゆる特殊相対論的な効果は無視してよい。）

光が光源を出てから検出器に到達するまでの時間をtとすると，v_B-v_Aはaとtを用いて$\boxed{\text{い}}$と書ける。もし，箱の速度が常にゼロであれば，tはcとhを用いて$\boxed{\text{う}}$と書ける。箱が加速を受けている場合も，光が伝わる間，箱の速度が常に光速に比べて十分小さいとき，すなわち，$\left|\frac{ah}{c}\right|\ll c$がみたされている場合は，$t=\boxed{\text{う}}$としてよい。以上のことから，$\frac{f_B}{f_A}=1-\frac{ah}{c^2}$となることがわかる。光の振動数を考える代わりに，光源から短い時間間隔Δt_Aをおいて出た２つのパルスが，検出器に到達するときにはどれだけの時間間隔（Δt_Bとする。）になっているかを考えることもできる。振動数fの光を，単位時間にf個のパルスが出るという状況に置き換えてみると明らかなように，$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=1+$（$\boxed{\text{え}}$）と書けることがわかる。（$h$，$a$，$c$を用いて表せ。）

(2)　ところで，図１のような等加速度運動をしている箱の中にいる観測者から見ると，物体には通常の力の他に観測者の加速度運動からくる［　お　］力が働き，見かけの重力加速度［　か　］が生じる。（図の上向きを正として答えよ。）このようにして生じる見かけの重力と本物の重力が何ら変わりないというのが，アインシュタインの等価原理である。

たとえば，地球の中心からの距離が r である点における地球による重力加速度は，地球の外では，向きは［　き　］であり，大きさは［　く　］である。（r，地球の質量 M および重力定数 G を用いて表せ。）これは，場所によって向きも大きさも異なるが，任意の点のまわりで十分小さい領域を考えると，その中では重力加速度は一定とみなしてよい。その領域内での物理現象は，上のような等加速度運動をしている観測者が見るものと全く同じである。

そうすると，図２の点線内のように，重力加速度が下向きで大きさ β が一定とみなせる領域内で，高さが h だけ異なる２つの地点Ａと Ｂの間で光をやり取りするとき，Ａにおける時間間隔 Δt_{A} とＢにおける時間間隔 Δt_{B} の間には $\dfrac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=1+$（［　け　］）の関係があることがわかる。（$\beta$，$h$，$c$ を用いて表せ。）

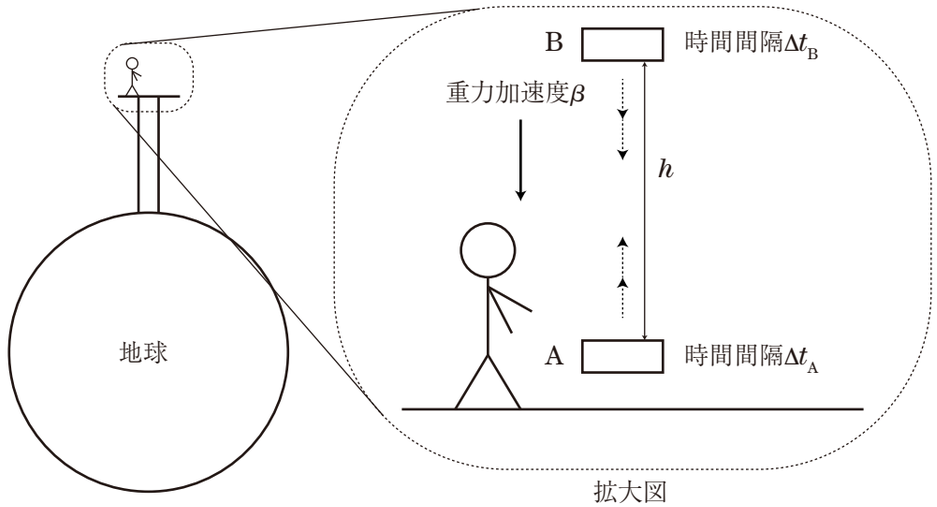

図2

問１　ここまではＡからＢへ光を送ることを考えたが，逆にＢからＡへ光を送る場合も $\dfrac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}$ は上の近似の範囲で同じ値となる。その理由を簡潔に述べよ。

この結果は，重力がある場合は，場所によって時間の進み具合が違っていることを示している。すなわち，Ａにおいて時間が Δt_{A} 経過する間に，Ｂでは Δt_{B} だけ時間が経過するのである。これを，「Ａにおける時間 Δt_{A} とＢにおける時間 Δt_{B} が対応している」ということにしよう。今の場合は，$\Delta t_{\mathrm{B}}>\Delta t_{\mathrm{A}}$ なので，時間の流れはＢにおけるほうが，Ａにおけるより速い。

(3)　上の結果を，2つの地点における重力ポテンシャルを使って表そう。質量 m の粒子が他の物体から重力を受けているとき，その位置エネルギーは m に比例するので $m\phi$ と表せる。ϕ を粒子が置かれている点における重力ポテンシャルとよぶ。

図2の場合は，A，B における重力ポテンシャルをそれぞれ ϕ_A，ϕ_B とすると，β，h を用いて，$\phi_B-\phi_A=$ $\boxed{\text{こ}}$ と書ける。結局，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$ は ϕ_A，ϕ_B，c を用いて，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=1+$（$\boxed{\text{さ}}$）と表される。実はこの式は，$\dfrac{|\phi_B-\phi_A|}{c^2}$ が1に比べて十分小さければ，重力加速度が空間的に一定でなくても成り立つ。

それを見るための具体例として，図3のように地表上の点Aと，その L だけ上空の点Bを考える。地球の半径を R とし，線分ABを N 等分する点を A_1，…，A_{N-1} とする。（便宜上，$A_0=A$，$A_N=B$ とする。）各点 A_i における重力ポテンシャルを ϕ_i とする。N が十分大きければ，各区間 A_iA_{i+1} では重力加速度は一定としてよいから，A_i における時間 Δt_i と A_{i+1} における時間 Δt_{i+1} が対応しているとすると，$\dfrac{\Delta t_{i+1}}{\Delta t_i}=1+\dfrac{\phi_{i+1}-\phi_i}{c^2}$ をみたす。

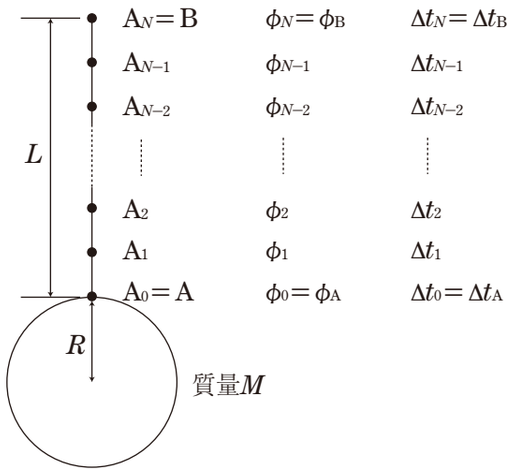

図3

問２　これらの N 個の式の辺々をかけ合わせ，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=1+$（$\boxed{\text{さ}}$）が成り立つことを示せ。

次に，$\boxed{\text{さ}}$ を地表における重力加速度の大きさ g と R，L，c で表すことを考える。地球の外側にあり地球の中心から距離 r だけ離れた点に，質量 m の粒子を置いたときの重力の位置エネルギーは，無限遠を基準にとると，m，r，M，G を用いて $\boxed{\text{し}}$ で与えられる。よって，その点における重力ポテンシャルは，$-\dfrac{GM}{r}$ である。一方，地表における重力加速度の大きさ g は $\dfrac{GM}{R^2}$ と書けるから，ϕ_A，ϕ_B は g，R，L を用いて，$\phi_A=$ $\boxed{\text{す}}$，$\phi_B=-g\dfrac{R^2}{R+L}$ と表せる。これらを $\boxed{\text{さ}}$ に代入すると，結局，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=1+$（$\boxed{\text{せ}}$）であることがわかる。（$g$, R, L, c を用いて表せ。）

(4)　この結果は，人工衛星の中の時計と地表の時計の進み方の違いを与えるために重要であり，GPS（全地球測位システム）等で実際に使われている。図４のように，地球の重力により，高度 L の円軌道上を一定の速さ v で動いている人工衛星 C を考える。図３と同様に, A, B は地表の点およびその L だけ上空の点である。今の場合，C は B に対してかなりの速さで動いているため，時計の遅れといわれる特殊相対論的な効果も考慮する必要がある。

特殊相対論によると，B における時間 Δt_B と C における時間 Δt_C の間には，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_B}=1-\dfrac{v^2}{2c^2}$ という近似式が成り立つ。B における重力加速度の大きさは $g\left(\dfrac{R}{R+L}\right)^2$ と書けるから，v^2 も g, R, L を用いて表せることに注意すると，これは，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_B}=1+$（ $\boxed{\text{そ}}$ ）と書ける。（g，R，L，c を用いて表せ。）

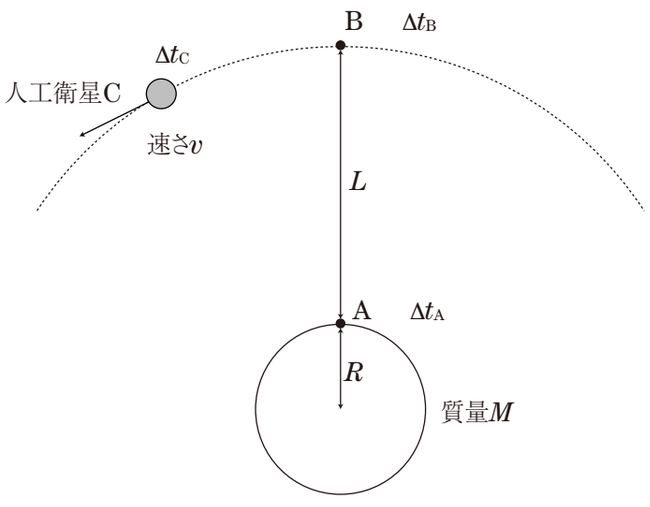

図4

問３　人工衛星の中の時計と地表の時計の進み方の比は $\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_A}$ である。以上のことから，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_A}$ を g，R，L，c を用いて表せ。また，$g=9.8\mathrm{m/s^2}$，$R=6.0\times10^6\mathrm{m}$，$L=3.0\times10^7\mathrm{m}$，$c=3.0\times10^8\mathrm{m/s}$ としたときの $\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_B}$，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_A}$ を 1＋(微小量) の形で求めよ。