A

東大京大への$\boxed{\text{理}}$系数学実戦演習【サンプル】

【発展編】

《演習時間 150 分》

現役高校生対象　大学受験指導

研伸館

第　1　問

自然数 1，2，…，n から k 個を取り出して積を作り，取り方すべてについてこの積を加えた和を $S(n, k)$ で表す．ただし，$k > n$ のときには $S(n, k) = 0$ とする．

例えば，

$$S(n, 1) = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S(4, 2) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 35$$

である．

(1)　$1 < k \leqq n$ に対して，$S(n, k)$ を $S(n-1, k-1)$ と $S(n-1, k)$ で表せ．

(2)　$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S(n, k)$ とするとき，a_n を a_{n-1} で表せ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

(3)　(2)で定めた a_n を求めよ．

第　2　問

$\triangle$ABC の外心 O が三角形の内部にあるとし，α, β, γ は，

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{0}$$

を満たす正の数であるとする．直線 OA，OB，OC がそれぞれ辺 BC，CA，AB と交わる点を A′, B′, C′ とする．このとき，$\triangle$A′B′C′ の外心が O に一致すれば $\alpha = \beta = \gamma$ であることを示せ．

第　3　問

n を自然数とし，$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ とおく．

(1)　I_n と I_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対して，$I_n > 0$ であることを示せ．

(3)　すべての自然数 n に対して，不等式

$$\frac{e}{n+2} < I_n < \frac{e}{n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(4)　$\lim_{n \to \infty} n(nI_n - e)$ を求めよ．

第　4　問

a を実数，z を 0 でない複素数とする．z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す．

(1) 次を満たす z を求めよ．

$$z+1-\frac{a}{z}=0$$

(2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ．

$$\bar{z}+1-\frac{a}{z}=0$$

(3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ．

$$z(\bar{z})^2+\bar{z}-\frac{a}{z}=0$$

第　5　問

ＡとＢの２人が，１個のサイコロを次の手順により投げ合う．

① １回目はＡが投げる

② １，２，３の目が出たら，次の回には同じ人が投げる

③ ４，５の目が出たら，次の回には別の人が投げる

④ ６の目が出たら，投げた人の勝ちとし，それ以降は投げない

このとき，ちょうどn回目のサイコロ投げでＡが勝つ確率を求めよ．

第 6 問

O を原点とする xyz 空間において，点$(1, 0, 0)$を中心とする半径 2 の球の表面および内部を K_1，点$(-1, 0, 0)$を中心とする半径 2 の球の表面および内部を K_2 とし，空間内の 3 点 P，Q，R に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)$$

で定まる点 X，Y を考える．

(1) P が K_1 を，Q が K_2 をくまなく動くとき，点 X の全体が作る立体の体積を求めよ．

(2) 次の条件を満たす点 R の全体が作る立体の体積を求めよ．
「K_1 に属する任意の P と，K_2 に属する任意の Q に対して，Y は K_1 に属する」

(3) 次の条件を満たす点 R の全体が作る立体の体積を求めよ．
「K_1 に属する任意の P と，K_2 に属する任意の Q に対して，Y は和集合 $K_1 \cup K_2$ に属する」

B

東大京大への理系数学実戦演習【サンプル】

【標準編】

《演習時間 150 分》

現役高校生対象　大学受験指導
研伸館

第　1　問

自然数 1，2，$\cdots$，n から k 個を取り出して積を作り，取り方すべてについてこの積を加えた和を $S(n, k)$ で表す．ただし，$k > n$ のときには $S(n, k) = 0$ とする．

例えば，

$$S(n, 1) = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S(4, 2) = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 = 35$$

である．

(1)　$1 < k \leqq n$ に対して，$S(n, k)$ を $S(n-1, k-1)$ と $S(n-1, k)$ で表せ．

(2)　$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S(n, k)$ とするとき，a_n を a_{n-1} で表せ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

(3)　(2)で定めた a_n を求めよ．

第　2　問

$\triangle$ABC の外心 O が三角形の内部にあるとし，α, β, γ は，

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{0}$$

を満たす正の数であるとする．直線 OA，OB，OC がそれぞれ辺 BC，CA，AB と交わる点を A$'$, B$'$, C$'$ とする．このとき，$\triangle$A$'$B$'$C$'$ の外心が O に一致すれば $\alpha=\beta=\gamma$ であることを示せ．

第　3　問

a を $0 \leqq a < 1$ の範囲の数とする．$F(a)=\int_1^2 \left| \log(x-a) \right| dx$ とおくとき，$F(a)$の最小値とそれを与える a の値を求めよ．

第 4 問

a を実数, z を 0 でない複素数とする. z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す.

(1) 次を満たす z を求めよ.

$$z+1-\frac{a}{z}=0$$

(2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ.

$$\bar{z}+1-\frac{a}{z}=0$$

(3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ.

$$z(\bar{z})^2+\bar{z}-\frac{a}{z}=0$$

第 5 問

AとBの2人が，1個のサイコロを次の手順により投げ合う．

① 1回目はAが投げる

② 1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる

③ 4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる

④ 6の目が出たら，投げた人の勝ちとし，それ以降は投げない

このとき，ちょうどn回目のサイコロ投げでAが勝つ確率を求めよ．

第　6　問

xyz 空間において，yz 平面上で放物線 $z=y^2$ と直線 $z=4$ で囲まれる平面図形を D とする．点$(1\,,1\,,0)$を通り z 軸に平行な直線を l とし，l の周りに D を 1 回転させてできる立体を E とする．

(1)　D と平面 $z=t$ との交わりを D_t とする．ただし，$0 \leqq t \leqq 4$ とする．点 P が D_t 上を動くとき，点 P と点$(1\,,1\,,t)$との距離の最大値，最小値を求めよ．

(2)　平面 $z=t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ $(0 \leqq t \leqq 4)$を求めよ．

(3)　E の体積 V を求めよ．

C

東大京大への$\boxed{\text{文}}$系数学実戦演習【サンプル】

【東大・文科】

《演習時間 100 分》

現役高校生対象　大学受験指導

研伸館

第　1　問

$\triangle$ABC の外心 O が三角形の内部にあるとし，α, β, γ は，

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$$

を満たす正の数であるとする．直線 OA，OB，OC がそれぞれ辺 BC，CA，AB と交わる点を A$'$, B$'$, C$'$ とする．このとき，$\triangle$ A$'$B$'$C$'$ の外心が O に一致すれば $\alpha=\beta=\gamma$ であることを示せ．

第 2 問

A と B のラベルの貼られた 2 つの箱がある．箱 A には 1，2，3，4，5 の番号の書いてある球がそれぞれ 1，2，3，4，5 個ずつ合計 15 個入っている．箱 B には 1，2，3，4，5 の番号の書いてある球が各 3 個ずつ合計 15 個入っている．

(1) 箱 A と箱 B から 1 つずつ球を取り出し，取り出した球の番号をそれぞれ X_A と X_B とする．$X_A > X_B$ となる確率を求めよ．

(2) A と B のラベルがはがれてしまい，どちらが箱 A か箱 B かがまったく分からなくなってしまった．ラベル①とラベル②を 2 つの箱のそれぞれに任意に貼り付け，箱①と箱②と新たに名前をつける．このとき，箱①と箱②から 1 つずつ球を取り出し，取り出した球の番号をそれぞれ X_1 と X_2 とする． $X_1 > X_2$ のとき，箱①が箱 A である確率を求めよ．

第　3　問

放物線 $y = -(x-p)^2 + q$ の頂点が曲線 $y = x(x^2-3)$ 上にあり，これらの 2 曲線の互いに相異なる共有点の個数が 2 であるとする．このとき，これらの 2 曲線で囲まれる部分の面積を求めよ．
ただし，$0 < p < 2$ とする．

第　4　問

自然数 1，2，…，n から k 個を取り出して積を作り，取り方すべてについてこの積を加えた和を $S(n, k)$ で表す．ただし，$k > n$ のときには $S(n, k) = 0$ とする．

例えば，

$$S(n, 1) = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S(4, 2) = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 = 35$$

である．

(1)　$1 < k \leqq n$ に対して，$S(n, k)$ を $S(n-1, k-1)$ と $S(n-1, k)$ で表せ．

(2)　$a_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$ とするとき，a_n を a_{n-1} で表せ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

(3)　(2)で定めた a_n を求めよ．

D

東大京大への$\boxed{\text{文}}$系数学実戦演習【サンプル】

【京大・文系】

《演習時間 120 分》

現役高校生対象　大学受験指導

研伸館

$\boxed{1}$

実数 x，y が $x^2+y^2=2$ を満たすとき，$(x+1)(y+1)$ の最小値を求めよ．

$\boxed{2}$

$\triangle$ABC の外心 O が三角形の内部にあるとし，α, β, γ は，

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$$

を満たす正の数であるとする．直線 OA，OB，OC がそれぞれ辺 BC，CA，AB と交わる点を $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ とする．このとき，$\triangle \mathrm{A'B'C'}$ の外心が O に一致すれば $\alpha=\beta=\gamma$ であることを示せ．

$\boxed{3}$

A と B のラベルの貼られた 2 つの箱がある．箱 A には 1，2，3，4，5 の番号の書いてある球がそれぞれ 1，2，3，4，5 個ずつ合計 15 個入っている．箱 B には 1，2，3，4，5 の番号の書いてある球が各 3 個ずつ合計 15 個入っている．

(1) 箱 A と箱 B から 1 つずつ球を取り出し，取り出した球の番号をそれぞれ X_{A} と X_{B} とする．$X_{\mathrm{A}}>X_{\mathrm{B}}$ となる確率を求めよ．

(2) A と B のラベルがはがれてしまい，どちらが箱 A か箱 B かがまったく分からなくなってしまった．ラベル①とラベル②を 2 つの箱のそれぞれに任意に貼り付け，箱①と箱②と新たに名前をつける．このとき，箱①と箱②から 1 つずつ球を取り出し，取り出した球の番号をそれぞれ X_1 と X_2 とする．$X_1>X_2$ のとき，箱①が箱 A である確率を求めよ．

$\boxed{4}$

　放物線 $y = -(x-p)^2 + q$ の頂点が曲線 $y = x(x^2-3)$ 上にあり，これらの 2 曲線の互いに相異なる共有点の個数が 2 であるとする．このとき，これらの 2 曲線で囲まれる部分の面積を求めよ．ただし，$0 < p < 2$ とする．

$\boxed{5}$

　自然数 1，2，…，n から k 個を取り出して積を作り，取り方すべてについてこの積を加えた和を $S(n, k)$ で表す．ただし，$k > n$ のときには $S(n, k) = 0$ とする．

　例えば，

$$S(n, 1) = 1 + 2 + \cdots + n$$

$$S(4, 2) = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 = 35$$

である．

(1)　$1 < k \leqq n$ に対して，$S(n, k)$ を $S(n-1, k-1)$ と $S(n-1, k)$ で表せ．

(2)　$a_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$ とするとき，a_n を a_{n-1} で表せ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

(3)　(2)で定めた a_n を求めよ．